Poisson fordeling

$$X_1 \sim \text{Poisson}(\mu), \qquad X_2 \sim \text{Poisson}(2\mu)$$

$$L(x_1, x_2; \mu) = \frac{\mu^{x_1} e^{-\mu}}{x_1!} \cdot \frac{(2\mu)^{x_2} e^{-2\mu}}{x_2!} = \frac{e^{-3\mu} \mu^{(x_1+x_2)} \cdot 2^{x_2}}{x_1! \cdot x_2!}$$

$$\ln L(x_1, x_2; \mu) = -3\mu + (x_1 + x_2)\ln\mu + x_2 \ln 2 - \ln\left(\prod_{i=1}^{2} x_i!\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mu}_e = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

9.4 Intervallestimering

Eks. Arbeidsulukke

Ein mann får ein splint i auge som kan komme frå ein spikar. Spikarfabrikanten ber eit laboratorium undersøke manganinnhaldet i splinten. Manganinnhaldet i spikar er 0.48 %.

Måle resultat i %

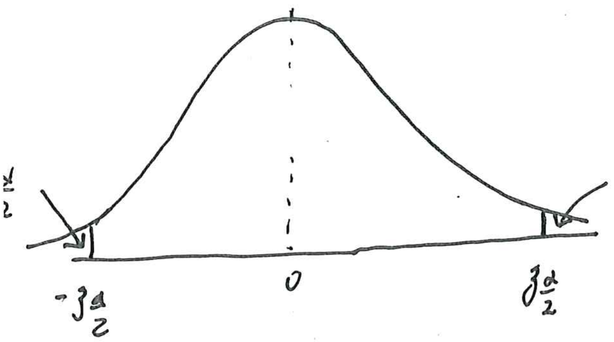
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0.58	0.78	0.48	0.68	0.40

$\bar{X} = 0.58$

Kva med σ^2? Laboratoriet oppgjev $\sigma = 0.1$

Rimeleg at dataane kjem frå ei normalfordeling og at $X_i, i=1,\dots,5$ er uavh. Då er $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{5})$ eller $N(\mu, (\frac{\sigma}{\sqrt{5}})^2)$

og $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}} \sim N(0,1)$



$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Longleftrightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{5}} < \bar{X}-\mu < z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{5}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Longleftrightarrow P\left(|\bar{X}-\mu| < z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{5}}\right) = 1-\alpha.$$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{0.025} = 1.96$

Konstruksjon av intervallestimator

La $X_1, \dots, X_n$ vere eit tilfeldig utval og normalfordelt.

$$\hat{\mu} = \bar{X} \sim N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

$$\text{d:} \quad P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\Big(\underbrace{\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_L} < \mu < \underbrace{\bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_U}\Big) = 1-\alpha.$$

Konfidensintervall. Def.

Eit $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for θ er gitt ved intervallet $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ der $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ er ~~estimerte~~ observerte verdiar for ~~dei~~ estimatorane $(\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U)$ som oppfyller

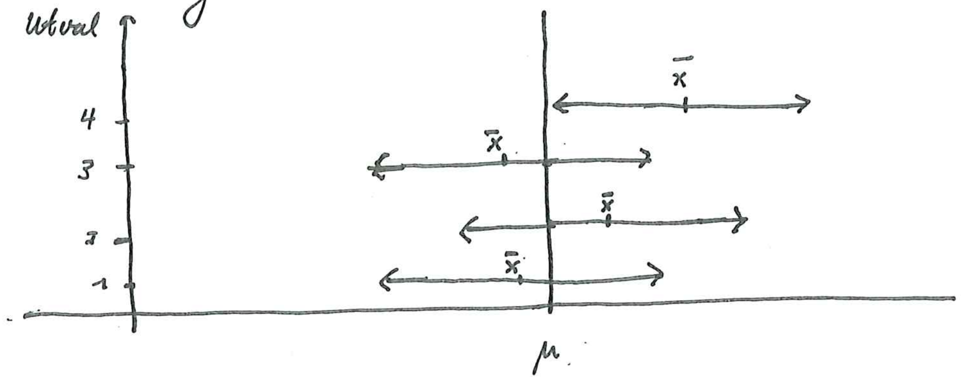
$$P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_U) = 1-\alpha.$$

Eit 95% konfidensintervallestimat for manganinnhaldet i splinten blir

$$\left(\bar{X} - z_{0.025}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{5}},\ \bar{X} + z_{0.025}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{5}}\right) = \left(0.584 - 1.96\cdot\frac{0.1}{\sqrt{5}},\ 0.584 + 1.96\cdot\frac{0.1}{\sqrt{5}}\right) = (0.496, 0.672)$$

Kva betyr konfidensintervall?

Gå ut i frå at vi tek mange utval med same n. $\bar{X}$ er stokastisk og vil variere frå gong til gong.



Vi har $P(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

$\therefore$ α% av intervalla vil oppfylle at anten er $\mu < \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ eller at $\mu > \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ slik at intervallet ikkje dekkjer μ.

Konfidenskoeffisienten $1-\alpha$ fortel oss at lagar vi veldig mange intervall så vil $(1-\alpha)100$% av desse inneholde μ. Vi seier at vi har $(1-\alpha)100$% tillit til at intervallet dekkjer μ (θ) eller at intervallet dekkjer μ (θ) med sannsyn $1-\alpha$.

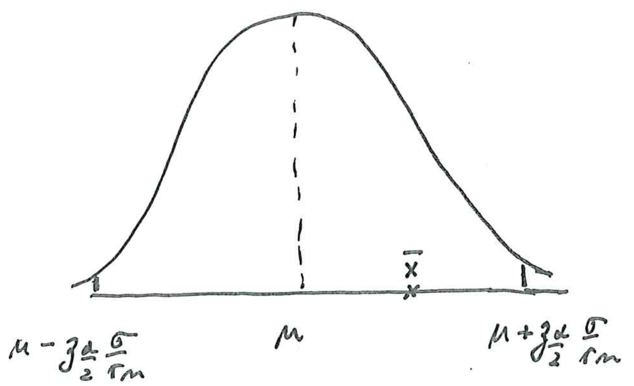
Lengda av konfidensintervallet.

σ^2 kjend gjev $L = \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - (\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Vi har $P(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

$\iff P(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Dersom intervallet inneheld μ



For alle intervall som inneheld μ så har vi at dersom $\bar{x}$ er brukt til å estimere μ, så har vi $100(1-\alpha)\%$ tillit til at feilen er mindre enn $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Dersom denne skal vere mindre eller lik enn ein gitt verdi e, må vi ha at $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq e \iff z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{e} \leq \sqrt{n} \implies n \geq \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{e}\right)^2$.

<u>Teorem 9.2</u>

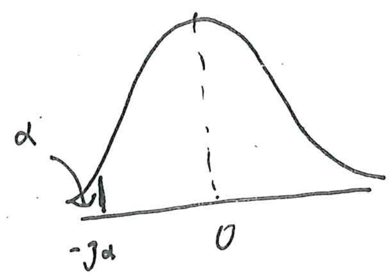
Dersom μ er estimert med $\bar{x}$, kan vi ha $100(1-\alpha)\%$ tillit til at feilen i estimeringa ikkje overstig e dersom $n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{e}\right)^2$.

Eks. arbeidsulukke.

Vil ha 95% tillit til at feilen er mindre enn $0.05 = e$, $\alpha = 0.05$

Vi må ha $n = \left(1.96 \cdot \frac{0.1}{0.05}\right)^2 = 1.96^2 \cdot 2^2 \approx 16$.

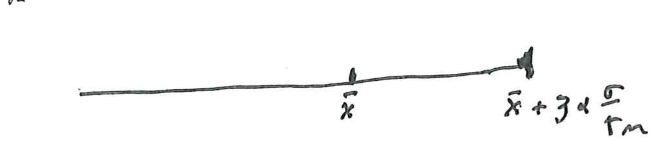
<u>Einsidige konfidensintervall</u>



$P(Z > -z_\alpha) = 1-\alpha \iff P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > -z_\alpha\right) = 1-\alpha$

$\iff P\left(\bar{X}-\mu > -z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \iff P\left(\mu < \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$

<u>Øvre einsidige ~~grense~~</u> konfidensgrense.



Nedre einsidige konfidensgrenser

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha \right) = 1 - \alpha \iff P\left(\bar{X} - \mu < z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

$$\iff P\left(\mu > \bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$